E.N.S.I. M P TA 1979

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On note O la matrice nulle et I la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note a_{ij} le coefficient figurant à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne et $\rho(A)$ le nombre $\max_{1 \leqslant i \leqslant q} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ sont les valeurs propres de A.

On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de la relation d'ordre partiel définie par :

$$A \leqslant B \Leftrightarrow a_{ij} \leqslant b_{ij}, \quad (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$$

De même, on munit $\mathbb{R}^k$ de la relation d'ordre partiel définie par :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

On utilisera sans chercher à les démontrer les résultats suivants :

R 1 : pour tout endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ par rapport à laquelle la matrice M de g est triangulaire supérieure ($m_{ij} = 0$ pour $i > j$).

R 2 : si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\rho(A) < 1$ et $A \geqslant O$, la matrice $I - A$ est régulière et on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$(I - A)^{-1} \geqslant I + A + A^2 + \ldots + A^r$$

I

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note $|A|$ la matrice $(|a_{ij}|)$ et $S(A)$ le plus grand coefficient de la matrice $|A|$.

$T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

1° Montrer que pour A et A′ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, B et B′ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$|A| \leqslant B, \ |A'| \leqslant B' \Rightarrow |AA'| \leqslant BB'$$

$$r \in \mathbb{N}^*, \ |A| \leqslant B \Rightarrow |A^r| \leqslant B^r$$

2° Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, les coefficients des k premières colonnes de la matrice T^k sont nuls.

3° Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|\gamma| < 1 \Rightarrow \lim_{r \to \infty} S[(\gamma I + T)^r] = 0$$

4° Montrer que pour une matrice triangulaire supérieure $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{r \to \infty} S(A^r) = 0$$

5° Montrer que pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{r \to \infty} S(A^r) = 0$$

II

Dans toute la suite, on désignera par la même lettre un vecteur de $\mathbb{R}^k$ et la matrice colonne de ses composantes par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des entiers tels que

$$1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k = n$$

On appelle *norme vectorielle de taille k sur* $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ définie par :

$$N : x \longmapsto \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ \vdots \\ N_k(x) \end{pmatrix}$$

avec :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} |x_i|, \ N_2(x) = \sum_{i=1+\alpha_1}^{\alpha_2} |x_i|, \ \ldots, \ N_k(x) = \sum_{i=1+\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |x_i|$$

On munit d'autre part $\mathbb{R}^n$ de la norme φ (au sens habituel) définie par

$$\varphi : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

On considère une application F de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que :

$$(\forall x,\ \forall y)\quad N[F(x) - F(y)] \leqslant A\, N(x - y)$$

où A est une matrice de $\mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$ vérifiant $A \geqslant O$ et $\rho(A) < 1$. On dit alors que F *est contractante relativement à la norme vectorielle* N.

1° *a.* Montrer que N vérifie les mêmes axiomes qu'une norme (pour la relation d'ordre partiel définie dans $\mathbb{R}^k$).

b. Montrer que N est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$.

2° *a.* Montrer que pour B dans $\mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$, x et y dans $\mathbb{R}^k$:

$$B \geqslant O,\ x \leqslant y \Rightarrow Bx \leqslant By$$

b. Montrer que l'équation $x = F(x)$ possède dans $\mathbb{R}^n$ au plus une solution.

3° On considère dans $\mathbb{R}^n$ la suite $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $x^{(p)} = F(x^{(p-1)})$ avec $x^{(0)}$ donné.

Établir une majoration (pour la relation d'ordre dans $\mathbb{R}^k$) de

$$N[x^{(p+1)} - x^{(p)}] \text{ utilisant } N[x^{(1)} - x^{(0)}]$$

4° En déduire pour $r \in \mathbb{N}^*$ une majoration de $N[x^{(p+r)} - x^{(p)}]$ utilisant $N[x^{(1)} - x^{(0)}]$ mais ne faisant pas intervenir r.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p_0 tel que :

$$p > p_0,\ r \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varphi[x^{(p+r)} - x^{(p)}] < \varepsilon$$

5° La suite $(x^{(p)})$ converge vers une limite x^* d'après la propriété démontrée dans la question précédente (*on ne demande pas de le vérifier*).

a. Montrer que x^* est l'unique solution dans $\mathbb{R}^n$ de l'équation $x = F(x)$.

b. Établir une majoration de $N[x^* - x^{(p)}]$ utilisant $N[x^{(1)} - x^{(0)}]$.

III

On choisit $n = 3$ et pour $\mu \in \mathbb{R}_+$, on considère l'application F de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$F : x \longmapsto \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \sin x_1 + \mu \cos x_2 \\ 2\mu \cos x_1 - \mu \sin x_2 - \mu \cos x_3 \\ 2\mu \sin x_1 + \mu \sin x_2 - 3\mu \sin x_3 \end{pmatrix}$$

1° On considère sur $\mathbb{R}^3$ la norme vectorielle de taille 1

$$N : x \longmapsto |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

c'est-à-dire la norme φ. Déterminer en utilisant l'étude précédente un nombre μ_0 tel que pour $\mu < \mu_0$ la suite $(x^{(p)})$ définie dans II-3° soit convergente pour tout choix de $x^{(0)}$ dans $\mathbb{R}^3$.

2° Même question avec la norme vectorielle de taille 3

$$N : x \longmapsto \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \end{pmatrix}$$

3° On choisit $\mu = \frac{1}{10}$. En utilisant la norme vectorielle définie dans III-1°, déterminer un nombre L tel que

$$(\forall p \in \mathbb{N})\quad \varphi[x^* - x^{(p)}] \leqslant L\, \varphi[x^{(1)} - x^{(0)}]$$

4° Même question en utilisant la norme vectorielle définie dans III-2°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail